Consideriamo equazioni paraboliche quasi lineari del tipo

(1) $$\frac{du}{dt} + A(t,u)u = f(t,u)$$

Introduciamo allora due spazi di Banach X_0, X_1 tali che $X_1 \hookrightarrow X_0$, X_1 è il dominio di un operatore lineare chiuso A, tale che -A è il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico $\{e^{-tA}\}$ soddisfacente la stima

$\|e^{-tA}\| \leq M e^{-\delta t}$, con M, $\delta>0$. Sotto tali condizioni è possibile definire $\forall\alpha>0$ l'operatore

$$A^{-\alpha} = \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \, e^{-tA} dt$$

Si ha che $A^{-\alpha}$ è limitato e iniettivo $\forall\alpha>0$.

Poniamo allora $A^{\alpha} \overset{def}{=} (A^{-\alpha})^{-1}$. $\forall\alpha>0$, $D(A^{\alpha}) = X_{\alpha}$ è denso in X_0, A^{α} è un operatore chiuso, $\beta>\alpha \Rightarrow X_{\beta} \subseteq X_{\alpha}$. Se poniamo $\|x\|_{\alpha} \overset{def}{=} \|A^{\alpha}x\|$ per $x \in X_{\alpha}$, avremo $X^{\beta} \hookrightarrow X^{\alpha}$ per $\beta > \alpha$.

Facciamo allora le seguenti ipotesi:

(B1) $A(t,u)$ è un operatore lineare chiuso in X_0 definito $\forall t \in [0,+\infty]$, $u \in X_{\alpha}$, con $\|u\|_{\alpha} < R$ per un certo $R \in]0,+\infty]$ ($\alpha \in]0,1[$ fissato).

Inoltre $D(A(t,u)) = X_1 \forall\ (t,u)$

(B2) $\rho(A(t,u)) \supseteq \{\lambda \in C \mid \mathrm{Re}\ \lambda \leq 0\}$,

$$\|(A(t,u)-\lambda)^{-1}\| \leq \mathrm{cost}\ (\|u\|_{\alpha})\ (1+|\lambda|)^{-1}$$

(Qui e nel seguito cost(r,s...) indicherà una funzione dipendente da r,s,... non decrescente, salvo diversa precisazione, in ciascuna variabile).

(B3) $\|A(t,u)-A(s,v)\|_{\mathscr{L}(X_1,X_0)} \leq cost(\|u\|_\alpha, \|v\|_\alpha)$

$(|t-s|^\mu + \|u-v\|_\alpha)$, con $\mu \in]0,1]$.

(B4) $\|A(t,u) - A(\infty,u)\|_{\mathscr{L}(X_1,X_0)} \leq cost\ (t,\|u\|_\alpha)$

con $cost(t,s) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} o \quad \forall s < R$.

Sulla f facciamo le seguenti ipotesi:

(F1) $f: [o,+\infty] \times B_R^\alpha \to X_0 \quad (B_R^\alpha = \{u\in X_\alpha |\ \|u\|_\alpha<R)$

di classe C^1 (su B_R^α prendiamo la norma $\|\cdot\|_\alpha$)

(F2) $\|f'_u(\infty,u)\|_{\mathscr{L}(X^\alpha,X_0)} \leq cost\ (\|u\|_\alpha)$

(F3) $\|f(t,u)-f(s,u)\| + \|f'_u(t,u)-f'_u(s,u)\|_{\mathscr{L}(X^\alpha,X_0)} \leq cost(\|u\|_\alpha)\ |t-s|^\mu$

(F4) $\|f(t,u)-f(\infty,u)\| + \|f'_u(t,u) - f'_u(\infty,u)\|_{\mathscr{L}(X_\alpha,X_0)}$

$\leq cost(t,\|u\|_\alpha)$ con $cost(t,s) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} o$.

Ad esempio, consideriamo il problema:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t,x,u,Du)\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f(t,x,u,Du)$$

(2) $u(t,x) = 0 \quad$ per $t \geq t_0, \quad x\in\partial\Omega$

$u(t_0,x)$ assegnato.

Qui Ω è un aperto limitato e regolare di R^n, $Du = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{x_n})$.

Supponiamo che:

(C1) le a_{ij} sono definite e limitate da $[0,+\infty] \times \bar{\Omega} \times B_{R'} \times B^n_{R'} \to R$

con $B_{R'} =]-R',R'[$, $B^n_{R'} = \{y \in R^n \mid |y| < R'\}$ $(0<R' \leq +\infty)$

(C2) $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x,y,p)\xi_i\xi_j \geq \nu\, |\xi|^2$, con $\nu>0$ indipendente da t,x,u,p.

(C3) $|a_{ij}(t,x,u,p) - a_{ij}(s,y,v,q)| \leq A_1(|t-s|^{\mu} + |x-y|^{\mu} + |u-v| + |p-q|)$

(C4) $a_{ij}(t,x,u,p) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} a_{ij}(\infty,x,u,p)$ uniformemente in x,u,p.

Sulla $f: [0,+\infty] \times \bar{\Omega} \times B_{R'} \times B^n_{R'} \to R$ supponiamo che:

(G1) $(u,p) \to f(t,x,u,p)$ è di classe C^1

(G2) $D_{(u,p)} f$ è limitato in $[0,+\infty] \times \bar{\Omega} \times B_{R'} \times B^n_{R'}$.

(G3) $|D_{(u,p)}f(t,x,u,p) - D_{(v,q)}f(t,x,v,q)| \leq A_2(|t-s|^{\mu}+|x-y|^{\mu}+|u-v|+|p-q|)$

(G4) $|f(t,x,u,p)-f(s,y,u,p)| \leq A_3(|t-s|^{\mu}+ |x-\mu|^{\mu})$

(G5) $|f(t,x,u,p) - f(\infty,x,u,p)| + |D_{(u,p)}f(t,x,u,p) +$

$- D_{(u,p)}f(\infty,x,u,p)| \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ uniformemente in x,u,p.

Poniamo $X_o = L^p(\Omega)$ $(1<p<+\infty)$, $X_1 = W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_o(\Omega)$, $Au = -\Delta u$.

E' ben noto che, se $s_1<\alpha<s_2$

$$(X_0,X_1)_{s_2,p} \hookrightarrow D(A^\alpha) \hookrightarrow (X_0,X_1)_{s_1,p}$$

e (vedi [1]), se $s>1/_{2p}$, $s\neq 1/2$, $(X_0,X_1)_{s,p} = \{u\in W^{2s,p}(\Omega) \mid u|_{\partial\Omega} = 0\}$.

Se p=2, A è autoaggiunto in $X_0 = L^2(\Omega)$ e, per $\alpha>1/4$, $D(A^\alpha) = \{u\in H^{2\alpha}(\Omega) \mid u|_{\partial\Omega}=0\}$ (vedi [2], vol. 1, cap. 1).

Perciò, se $\alpha > \frac{1}{2}$ e $p\neq 2$, oppure $\alpha\geq 1/2$, $p=2$, $D(A^\alpha) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega)$.

Infine, se $p>n$, $\alpha>1/2 + n/_{2p}$, X_α è uno spazio di funzioni di classe C^1, con le derivate prime hölderiane.

Dunque, $\exists R>0$, tale che $\|u\|_\alpha < R \Rightarrow \|u\|_{C'(\bar\Omega)} < R'$. Perciò, per $u\in B^\alpha_R$, possiamo porre:

$$D(A(t,u)) = W^{2,p}(\Omega)\cap W^{1,p}_0(\Omega),$$

$$A(t,u)v = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x,u,Du)\,\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \tag{3}$$

$$f(t,u)\,(x) = f(t,x,u(x),\,Du(x))$$

Vale il seguente risultato:

<u>Proposizione 1.</u> Siano soddisfatte (C1)-(C4), (G1)-(G5), sia $p>n$, $\alpha>1/2 + n/_{2p}$. Allora gli operatori definiti in (3) soddisfano (B1)-(B4), (F1)-(F4) per un opportuno valore di $R>0$.

Ricordiamo anche il seguente risultato (vedi [3]) di esistenza locale:

nelle ipotesi (B1)-(B4),(F1)-(F4), esiste un'unica soluzione classica (locale) massimale di (1) con condizione iniziale $u(t_0) = u_0$, per $u_0\in X_\beta(\beta>\alpha)$, $\|u_0\|_\alpha<R$.

Veniamo al problema dell'esistenza di soluzioni convergenti all'in

finito.

Valgono innanzi tutto i seguenti risultati:

Proposizione 2. Sia $u_0 \in X_1 \cap B_R^\alpha$, u la soluzione massimale di (1) con $u(t_0) = u_0$. Supponiamo che:

(I) u è definito su $[t_0,T[$.

(II) $\exists \beta > \alpha$ t.c. $\sup_{t \geq t_0} \|u(t)\|_\beta < +\infty$

(III) $\sup_{t \geq t_0} \|u(t)\|_\alpha < R$.

Allora, $T = +\infty$, $\sup_{t \geq t_0} \|u(t)\|_1 < +\infty$, u è globalmente hölderiana a valori in X_γ $\forall \gamma \in [0,1[$.

Proposizione 3. Sia $u_0 \in B_R^\alpha$, tale che $\exists u$ soluzione di (1) soddisfacente:

(i) $\sup_{t \geq t_0} \|u(t)\|_\beta < +\infty$ per un certo $\beta > \alpha$.

(ii) $\|u(t)-u_0\|_0 \overset{+\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Allora

(1) $u_0 \in X_1$, $A(\infty,u_0)u_0 = f(\infty,u_0)$

(2) $\|u(t)-u_0\|_1 \overset{\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Grosso modo il risultato precedente implica che il limite di una soluzione di (1) deve essere una soluzione di $A(\infty,u)u = f(\infty,u)$. Nel seguito, per semplicità, supporremo che $f(\infty,0) = 0$ e studieremo l'esistenza e il comportamento asintoti-

co di soluzioni convergenti a 0.

Vale, innanzi tutto, il seguente risultato:

Teorema 4. Supponiamo (I) $f(\infty,0)=0$, (II) $\rho(A(\infty,o) - f'_u(\infty,o)) \supseteq$
$\supseteq \{\lambda \in C \mid Re\lambda \leq 0\}$. Allora $\forall \beta \in]\alpha,1]$, $\exists T_0 \geq 0$, $\mu_0>0$ tali che se u è soluzione massimale di (1) con $\|u(t_0)\|_\beta \leq \mu_0$, $t_0 \geq T_0$, u è globalmente definita e

$\|u(t)\|_1 \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Dim. (Cenno) - La dimostrazione si può fare adattando il metodo di Sobolevski per provare l'esistenza di soluzioni locali.

Se u soddisfa (1), si ha, posto $v(t) = A^\alpha u(t)$, $\frac{d}{dt}(A^{-\alpha}v(t))+ + A(t, A^{-\alpha}v(t))\; A^{-\alpha}v(t) = f(t,A^{-\alpha}v(t))$.

Indichiamo con $U_v(t,s)$ l'operatore di evoluzione associato a $\{A(t,A^{-\alpha}v(t))\}$. Deve essere, almeno formalmente:

$$A^{-\alpha}v(t) = U_v(t,t_0)u(t_0) + \int_{t_0}^{t} U_v(t,s)f(s,A^{-\alpha}v(s))ds,$$

da cui

$$v(t) = A^\alpha U_v(t,t_0)u(t_0) + \int_{t_0}^{t} A^\alpha U_v(t,s)f(s,A^{-\alpha}v(s)|ds$$

Per poter costruire l'operatore di evoluzione la v deve essere hölderiana (almeno localmente).

Poniamo $S(t_0,\eta,\theta) = \{v \in C([t_0,+\infty[\cdot,X_0) \mid \|v(t)-v(\tau)\| \leq$
$\leq (t-\tau)^\theta$, $\|v(t)\| \leq \eta$, $\|v(t)\| \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0\}$ (qui $0<\theta<\beta-\alpha$, $\eta>0$),
$Tv(t) = A^\alpha U_v(t,t_0)u(t_0) + \int_{t_0}^{t} A^\alpha U_v(t,s)\; f(s,A^{-\alpha}v(s)|ds$. $S(t_0,\eta,\theta)$ è un sotto-insieme chiuso di $\{v \in C([t_0,+\infty[;\; X_0) \mid v$ è limitata$\}$. Si verifica che per $\eta>0$

opportuno, t_0 abbastanza grande, T è una contrazione in $S(t_0,\eta,\theta)$, purché $\|u(t_0)\|_\beta$ sia sufficientemente piccolo. Da ciò segue il risultato.

Osserviamo che, se $f(t,0) = 0$ $\forall t \in [0,+\infty]$, una conseguenza semplice del teorema 4 è un risultato di stabilità asintotica della soluzione nulla.

Passiamo ora a considerare il comportamento asintotico delle soluzioni convergenti a 0.

Valgono i seguenti risultati:

Teorema 5. Supponiamo che $A(t,u) = A(u)$, $f(t,u) = f(u)$, $f(o)=0$. Poniamo $B = -A(o) + f'(0)$ e ammettiamo che $\sigma(B) = \{\beta\} \cup \sigma_1$, con $\operatorname{Re} \beta > 0$, $\inf_{\lambda \in \sigma_1} \operatorname{Re}\lambda > \operatorname{Re}\beta$, B^{-1} sia compatto in X_0 e β sia un autovalore semplice di B. Supponiamo inoltre che $\|f(u) - f'(0)u\| = 0\,(\|u\|_\alpha^{1+\nu})$ (con $\nu>0$) (per $\|u\|_\alpha \to 0$). Se u soddisfa $\frac{du}{dt} + A(u(t))u(t) = f(u(t))$, $\|u(t)\|_{\alpha'} \to 0$ per un certo $\alpha' > \alpha$,

$$u(t) = e^{-\beta t}p + r(t),$$

con $p \in X$, $(\beta - \beta)p = 0$, $\|r(t)\|_\gamma = o\,(e^{-\beta t})$ $(t \to +\infty)$ $\forall \gamma \in [0,1[$.

Teorema 6. Siano soddisfatte le ipotesi del teorema 4. Inoltre, $f(t,0) = t^{-\rho}f_1 + t^{-\rho}f_2(t)$ con $\rho>0$, $\|f_2(t)\|_0 \xrightarrow{t\to\infty} o$. Se u è soluzione di (1) con $\|u(t)\|_\beta \xrightarrow{t\to\infty} o$ per $\beta > \alpha$, si ha:

$$u(t) = t^{-\rho}\, u_1 + r_1(t) \quad , \text{ con } u_1 \in X_1,$$

$u_1 = A(\infty,0)^{-1}\, f_1$, $\|r_1(t)\|_\gamma = o\,(t^{-\rho})$ $(t \to \infty)$ $\forall \gamma \in [0,1[$.

Vediamo alcune applicazioni dei risultati precedenti al problema (2). Qui supponiamo sempre che

$$X_0 = L^p(\Omega), \quad \text{con } p>n, \quad \alpha>1/2 + n/2p ,$$

$$f(\infty,x,0,0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u}(\infty,x,0,0) \geq 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega},$$

Quest'ultima condizione assicura (come conseguenza del principio del massimo e della teoria degli operatori positivi di Krein-Rutman (vedi [4])) che la condizione $\rho(A(\infty,0) - f'_u(\infty,0)) \supseteq \{z \in C \mid \text{Re} z \leq o\}$ è soddisfatta. Si ha allora:

Teorema 4' $\forall s>1+n/p$, $\exists T_0 \geq 0$, $\mu_0>0$ tali che la soluzione massimale di (2) è globalmente definita se $\|u(t_0,\cdot)\|_{s,p} \leq \mu_0$, $t_0 \geq T_0$.

Si ha inoltre

$$\|u(t,\cdot)\|_{2,p} \xrightarrow{t\to+\infty} o$$

Teorema 5'. Supponiamo $a_{ij}(t,x,u,p) = a_{ij}(x,u,p)$, $f(t,x,u,p) = f(x,u,p)$. Poniamo $D(B) = X_1 = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, $Bu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,0,0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_j}(x,0,0) \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial u}(x,0,0)u$.

Poniamo $\beta = \inf\{\text{Re}\lambda \mid \lambda \in \sigma(B)\}$. Allora:

(I) β è un autovalore positivo e semplice

(II) Se u è una soluzione di (2) convergente a 0 in $W^{s,p}(\Omega)$ (con $s>1+n/p$), si ha

$$u(t,x) = e^{-\beta t} p(x) + r(t,x), \text{ con } p \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega),$$

$$(\beta-B)p = 0 \ , \ e^{\beta t} \|r(t,\cdot)\|_{\sigma,p} \xrightarrow{t\to\infty} 0 \ \forall \sigma<2.$$

<u>Teorema 6'</u>. Sia $f(t,x,0,0) = t^{-\rho} f_1(x) + t^{-\rho} f_2(t,x)$ con $\rho>0$, $\|f_2(t,\cdot)\|_{o,p} \xrightarrow{t\to\infty} o$. Se u è soluzione di (2), $\|u(t,\cdot)\|_{s,p} \xrightarrow{t\to\infty} o$ con $s>1+n/p$, si ha

$$u(t,x) = t^{-\rho} u_1(x) + t^{-\rho} r_1(t,x)$$

con u_1, $r_1(t,\cdot)\in W^{2,p}(\Omega)\cap W_o^{1,p}(\Omega)$, $\|r_1(t,\cdot)\|_{\sigma,p} \xrightarrow{t\to\infty} o$

$\forall\sigma<2$ e u_1 è soluzione di

$$- \sum_{i,j}^{n} a_{ij}(\infty,x,0,0) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i}(\infty,x,0,0) \frac{\partial u_1}{\partial x_j} +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial u}(\infty,x,0,0)u_1 = f_1(x)$$

$$u_1\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Fino a questo punto abbiamo considerato solo il caso in cui $\rho(A(\infty,0)-f_u'(\infty,0)) \supseteq \{z\in C \mid Re z \leq 0\}$ e il suo opposto era quindi il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico asintoticamente stabile.

Vogliamo ora considerare il caso in cui quest'ultima condizione non è più necessariamente verificata.

Per farci un'idea del tipo di risultati che ci possiamo aspettare consideriamo il caso dell'equazione differenziale ordinaria

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + f(u) = 0 \\ u(0) = u_o \end{cases}$$

in R^n, con $f\in C'(R^n)$, $f(0) = 0$

Se f è lineare e non possiede autovalori con parte reale nulla, la soluzione di (3) tende a 0 se e solo se $u_0 \in \tilde{X}$, con $\tilde{X}$ somma diretta degli autospazi generalizzati corrispondenti agli autovalori di f con parte reale positiva.

Nel caso in cui f non è lineare, supponiamo f'(0) non abbia autovalori con parte reale nulla e indichiamo questa volta con $\tilde{X}$ la somma diretta degli autospazi generalizzati corrispondenti agli autovalori con parte reale positiva, con P un proiettore di R^n su $\tilde{X}$.

Poniamo $S_{\rho,\sigma} = \{u_0 \in R^n | u(\cdot,u_0)$ è globalmente definita, $|Pu_0| \leq \sigma$, $\lim_{t\to\infty} u(t,u_0)=0$, $|u(t,u_0)| \leq \rho\ \forall t>0\}$, con $\rho,\sigma>0$ $u(t,u_0)$ soluzione massimale di (3).

Indichiamo con $B_\sigma = \{x \in \tilde{X}\ \ |x| \leq \sigma\}$. Allora, $\exists \sigma,\rho>0$ tali che $P|_{S_{\rho,\sigma}} : S_{\rho,\sigma} \to B_\sigma$ è un omeomorfismo. Inoltre, $S_{\rho,\sigma}$ è tangente in 0 a B_σ, nel senso che $\lim_{\substack{x \in S_{\rho,\sigma} \\ |x|\to 0}} \frac{|x-Px|}{|x|} = 0$.

Un risultato del genere vale anche per equazioni semilineari (vedi [6]). Vogliamo estenderlo ad alcune equazioni quasi lineari.

Limitiamoci a considerare equazioni autonome del tipo

$$(4) \qquad \frac{du}{dt} + A(u(t))u(t) = f(u(t)).$$

Supponiamo f(0) = 0. Scriviamo (4) nella forma

$$(4') \qquad \frac{du}{dt} + Bu = f(u),$$

con B = A(0) - f'(0), f(u) = [A(u)-A(0)]u + f(u) - f'(0)u.

Si osservi che "moralmente" f'(0) = 0.

Per studiare (4') pensando g come una perturbazione di B, è neces-

sario cambiare il quadro funzionale.

Cominciamo allora col richiamare alcune definizioni e risultati contenuti in [5].

Sia $-A$ il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico in uno spazio di Banach $X, \theta \in]0,1[$.

Poniamo

$$D_\theta(A) = \{x \in X \mid \lim_{t\to+\infty} t^\theta A(A+t)^{-1}x = 0\}$$

$D_\theta(A)$ è uno spazio di interpolazione continua, $D(A) \hookrightarrow D_\theta(A) \hookrightarrow X$, se poniamo $\|x\|_\theta = \|x\| + \sup_{t\geq t'} \|t^\theta A(A+t)^{-1}x\|$.

Poniamo $D_{1+\theta}(A) = \{x \in D(A) \mid Ax \in D_\theta(A)\}$, $\|x\|_{1+\theta} = \|x\| + \|Ax\|_\theta$.
L'interesse di $D_\theta(A)$ sta nel seguente risultato di regolarità massimale: consideriamo l'equazione

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = f(t), \quad t \in [0,T] \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

con $f \in C([0,T]; D_\theta(A))$. Allora (5) ha un'unica soluzione stretta $u(t) = \int_0^t \exp(-(t-s)A)f(s)ds$; inoltre u è continua a valori in $D_{1+\theta}(A)$.

Per i nostri scopi è utile la seguente

<u>Proposizione 7.</u> Sia $-A$ il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico, $\rho(A) \supseteq \{z \in \mathbb{C} \mid Re z \leq 0\}$. Sia poi $f: [0,+\infty[\to D_\theta(A)$ continua.

Se u è la soluzione di (5) si ha

(I) f limitata a valori in $D_\theta(A)$ su $[0+\infty[$ $\Rightarrow$ u limitata a valori in $D_{1+\theta}(A)$ su $[0,+\infty[$.

(II) $\lim_{t\to+\infty} \|f(t)\|_\theta = 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_{1+\theta} = 0.$

In ciascun caso $\sup_{t\geq 0} \|u(t)\|_{1+\theta} \leq C \sup_{t\geq 0} \|f(t)\|_\theta$.

Sia ora $-B$ il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico in X. Supponiamo che

(h) $\sigma(B)\cap\{z\in C \mid \mathrm{Re}\, z = 0\} = \emptyset$ e

poniamo

$$\sigma_1 = \sigma(B)\cap\{z\in C \mid \mathrm{Re}\, z > 0\} \; , \; \sigma_2 = \sigma(B)-\sigma_1$$

Sia Γ una curva orientata col supporto in $\rho(B)$ che gira attorno a σ_1. Poniamo

$$P_1 = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma (z-B)^{-1} dz$$

$P_2 = 1-P_1$; P_1 e P_2 sono proiettori. Poniamo $X_j = P_j(x)$. X_j è invariante rispetto a B, $X_1 \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} D(B^k)$

Chiamiamo B_j la parte di B in X_j.

Si ha che $B_1 \in \mathscr{L}(X_1)$, $\sigma(B_1) = \sigma_1$, $\sigma(B_2) = \sigma_2$, $-B_2$ è il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico in X_1 con $\|e^{-tB_2}\|_{\mathscr{L}(X_2)} \leq Me^{-\delta t}$ $(\delta>0)$. Se $x\in X_j$, $\exp(-tB_j)x = \exp(-tB)x$, $P_j \exp(-tB) = \exp(-tB)P_j = \exp(-tB_j)P_j$.

Si ha allora:

<u>Lemma 8.</u> Sia $x\in X$. Allora $\exp(-tB)\, x \xrightarrow{t\to\infty} 0$ $\forall x\in X_2$. Inoltre, si ha anche per $x\in X_2$: $\|\exp(-tB)x\|_{1+\theta} \xrightarrow{t\to\infty} 0$.

Veniamo ora al risultato che volevamo provare:

Teorema 9. Siano B soddisfacente (h), $g: D_{1+\theta}(B)\to D_\theta(B)$ di classe C^1, tali che:

(I) $g(0)=0$, $g'(0) = 0$, g è limitata sui limitati.

(II) $-B+g'(u)$ è la restrizione a $D_{1+\theta}(B)$

del generatore infinitesimale di un semigruppo analitico in X con dominio D(B) e $D_{1+\theta}(B-g'(u)) = D_{1+\theta}(B)$.

Sia $z(\cdot,x)$ la soluzione massimale di

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{dz}{dt} + Bz(t) = g(z(t)) \\ z(0) = x \in D_{1+\theta}(B) \end{cases}$$

Se $\rho>0$, poniamo $S_{\rho,\sigma} = \{x\in D_{1+\theta}(B) \mid \|z(t,x)\|_{1+\theta} \le \rho \quad \forall t\ge 0, \ \|P_2x\|_{1+\theta}\le\sigma$, $\lim_{t\to+\infty} \|z(t,x)\|_{1+\theta}=0\}$, $B_\sigma = \{x\in D_{1+\theta}(B)\cap X_2 \mid \|x\|_{1+\theta} \le \sigma\}$.

Allora, $\exists\sigma,\rho>0$ tali che $P_2|_{S_{\rho,\sigma}}$ è un omeomorfismo fra $S_{\rho,\sigma}$ e B_σ (con la topologia di $D_{1+\theta}(B)$). Inoltre, $S_{\rho,\sigma}$ e B_σ sono tangenti in 0, nel senso che

$$\lim_{\substack{x\in S_{\rho,\sigma} \\ \|x\|_{1+\theta}\to 0}} \frac{\|x-P_2x\|_{1+\theta}}{\|x\|_{1+\theta}} = 0.$$

Dim. (Cenno). Sia $x\in S_{\rho,\sigma}$ $z(t) = z(t,x)$.

Allora,

$$z(t) = \exp(-tB)x + \int_0^t \exp(-(t-s)B)g(t(s))ds.$$

Se $z_j(t) = P_j z(t)$,

$$z_j(t) = \exp(-tB_j)P_j x + \int_0^t \exp(-(t-s)B_j)P_j g(z(s))ds.$$

Per j=1, applicando $\exp(tB_1)$, si ottiene

$$P_1 x = -\int_0^t \exp(sB_1)\; P_1 g(z(s))ds + \exp(tB_1)z_1(t)$$

e al limite per $t\to+\infty$, (essendo $\|\exp(sB_1)\|\leq Me^{-\delta t}$) $P_1 x = -\int_0^{+\infty} \exp(sB_1)\; P_1 g(z(s))ds$

Segue

$$z(t) = \exp(-tB_2)P_2 x + \int_0^t \exp(-(t-s)B_2)P_2 g(z(s))ds$$

$$-\int_t^{+\infty} \exp((s-t)B_1)\; g(z(s))ds = Tz(t).$$

Per $\rho>0$, definiamo $Y_\rho = \{u \in C([0,+\infty[; D_{1+\theta}(B)) |\; \|u(t)\|_{1+\theta} \leq \rho,\; \|u(t)\|_{1+\theta} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} o\}$.

Utilizzando le stime ottenute dalla prop. 7 (ponendo $A = B_2$), si prova che, per ρ opportuno, e per $\|P_2 x\|_{1+\theta} \leq \sigma$, $T(Y_\rho) \subseteq Y_\rho$ e T è una contrazione in Y_ρ. Ne segue che $\forall a \in B_\sigma$ con $\|a\|_{1+\theta} \leq \sigma$ esiste un unico $x \in S_{\rho,\sigma}$ tale che $P_2 x=0$. Basta prendere $x = z(0)$ con z punto fisso di T.

Consideriamo il seguente esempio:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a(u, \frac{\partial u}{\partial x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g(u),\; t\geq 0,\; x \in I = [0,1]$$

(7) $\qquad u(t,0) = u(t,1) = 0$

$u(0,x)$ assegnato,

con $a \in C^2(R^2)$, $g \in C^1(R)$, $g(0) = 0$, $a(u,p)>0 \ \forall (u,p) \in R^2$. Poniamo $D(B) = H^2(I) \cap H_0^1(I)$, $Bu = -a(0,0)u'' + g'(0)u$.

Si ha che per $0<\theta<1/4$ $D_\theta(B) \quad h_2^{2\theta}(I) =$

$$= \{u \in L^2(I) \mid t^{-2\theta} \|u(t+\cdot)-u\|_{L^2(I\cap(I-t))} \xrightarrow{t\to 0} 0\} \quad \text{e } D_{1+\theta}(B) =$$

$$= \{u \in H^2(I) \cap H_0'(I) \mid u'' \in h_2^{2\theta}(I)\}.$$

Si verifica (posto $g(u) = [a(u,u') - a(0,0)]u'' + g(u)-g'(0)u$ che la teoria precedente è applicabile se $g'(0) + a(0,0)\ K^2\Pi^2 \neq 0 \ \forall K \in N$. In tal caso, $X_2 = \{u \in L^2(I) \mid \int_0^1 u(t) \text{ sen } (r\pi t)\, dt = 0 \ \forall r \in N,\ r \leq j\}$ con

$g\ (0) + a(0,0)\ j^2\pi^2 < 0 < g'(0) + a(0,0)(j+1)^2\pi^2\}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] P. GRISVARD, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., IV Sez. t. 2, 311-395 (1969).

[2] J.L. LIONS, E. MAGENES, "Problemes aux limites non homogêneus et application", Durod.

[3] P.E. SOBOLEVSKI, Trudy Moskov. Mat. 10, 297-350 (1961).

[4] H.G. KREIN, M.A. RUTMAN, Uspehi Mat. Nauk, 3 (1948).

[5] G. DE PRATO, P. GRISVARD, Ann. Mat. Pura Appl., IV Sez., Vol. 122, 329-396 (1979).

[6] D. HENRY, "Geometric theory of semilinear parabolic equations", Springer, 1981.